Durée : 3 heures

Préambule

Soit $[a, b]$ un intervalle de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Pour tout entier naturel k, on note $C^k[a, b]$ l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui admettent une dérivée d'ordre k sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, cette dérivée étant la restriction à $]a, b[$ d'une fonction *continue* notée $f^{(k)} : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Montrer* que si $f \in C^k[a, b]$, alors $f \in C^p[a, b]$ pour $0 \leqslant p < k$.

Dans tout le problème, on considère une fonction continue $F : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un nombre réel $L > 0$ tels que
$(\forall x \in [a, b])(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})(\ |F(x, y) - F(x, z)| \leqslant L\,|y - z|\ )$.

On considère aussi une fonction $f \in C^1[a, b]$ et un nombre réel η tels que

$$(1)\qquad \begin{cases} f(a) = \eta \\ f^{(1)}(x) = F(x, f(x)) \qquad \text{pour } x \in [a, b]. \end{cases}$$

On considère en outre un entier naturel $N > 0$ et on pose $h = (b - a) / N$ et, pour $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $x_n = a + nh$.

On considère enfin une suite finie de nombres réels, $y_0, y_1, \ldots, y_N$ telle que pour $n \in \{0, 1, \ldots, N - 1\}$
on ait $y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n)$. On pose $e_n = y_n - f(x_n)$.

I

1° On suppose que $f \in C^2[a, b]$. Calculer e_{n+1} en fonction de e_n et en déduire

$$|e_n| \leqslant \frac{(e^{nLh} - 1)\,Mh}{2L} + |y_0 - \eta|\,e^{nLh}$$

pour $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ où $M = \mathrm{Max}\{\ |f^{(2)}(x)|\ ,\ x \in [a, b]\}$.

2° Soit ε réel strictement positif donné. Expliquer brièvement comment ce qui précède peut permettre de calculer une valeur approchée à ε près de $f\left(a + \frac{ib}{10}\right)$, $i \in \{1, \ldots, 10\}$, dans le cas où $f \in C^2[a, b]$.

.../...

E.N.S. ST-CLOUD & FONTENAY Option Mathématiques (M')

3° Dans cette question et la suivante, on suppose que F admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continues sur $]a, b[\times \mathbb{R}$ et que ces dérivées partielles admettent des prolongements continus à $[a, b] \times \mathbb{R}$ que l'on note comme à l'accoutumée $F'_x, F'_y, F''_{x^2}, F''_{xy}$ et F''_{y^2}.

a. Montrer que $f \in C^3[a, b]$.

b. On suppose que $y_0 = \eta$ et on pose $d_n = \dfrac{e_n}{h}$ pour $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

Montrer que

$$d_{n+1} = d_n + h\left[F'_y(x_n, f(x_n))\, d_n - \frac{1}{2} f^{(2)}(x_n) \right] + h^2 \theta_n C(M_2, M_3)$$

où θ_n est un réel tel que $|\theta_n| \leqslant 1$ et où $C(M_2, M_3)$ est un réel positif indépendant de n mais dépendant en particulier de

$$M_2 = \text{Max}\{ |F''_{y^2}(x, z)|, x \in [a, b], |z - f(x)| \leqslant C_1(b - a) \},$$

où $C_1 = \dfrac{e^{NLh} - 1}{2L} M$, et de $M_3 = \text{Max}\{ |f^{(3)}(x)|, x \in [a, b] \}$.

4° On considère une fonction $d \in C^1[a, b]$ telle que :

$$\begin{cases} d^{(1)}(x) = F'_y(x, f(x))\, d(x) - \dfrac{1}{2} f^{(2)}(x) \\ d(a) = 0 \end{cases}$$

Par un calcul analogue à celui de 1°, montrer que si $y_0 = \eta$, on a $|e_n - h\, d(x_n)| \leqslant C_2 h^2$, où C_2 est un réel indépendant de N.

II

1° Soit Φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $K \in \mathbb{R}$, $K < 1$, vérifiant :

$$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad (\forall z \in \mathbb{R}) \quad (|\Phi(y) - \Phi(z)| \leqslant K |y - z|)$$

Montrer que la suite infinie (t_n) avec t_0 donné et $t_{n+1} = \Phi(t_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, est convergente, que l'équation $y = \Phi(y)$ a une solution unique et que (t_n) converge vers cette solution.

2° On considère une suite (z_n), $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ telle que

$$(2) \quad \begin{cases} z_0 = \eta \\ z_{n+1} = z_n + h\, F(x_{n+1}, z_{n+1}) \quad n \in \{0, 1, \ldots, N - 1\} \end{cases}$$

a. Montrer que pour $hL < 1$ le système (2) définit (z_n) unique dès que η est connu.

b. On suppose que $hL < 1$ et $f \in C^2[a, b]$.

Trouver une majoration de $|z_n - f(x_n)|$ du type de celle donnée en I. 1° pour $|e_n|$.

3° On définit les suites (u_n), $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, et (v_n), $n \in \{1, \ldots, N\}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = \eta \\ v_{n+1} = u_n + h\, F(x_n, u_n) \\ u_{n+1} = u_n + h\, F(x_{n+1}, v_{n+1}) \qquad n \in \{0, 1, \ldots, N - 1\} \end{cases}$$

Si $f \in C^2[a, b]$, trouver une majoration de $|u_n - f(x_n)|$ du type de celle donnée en I. 1° pour $|e_n|$.

III

Soit $g \in C^0[a, b]$ et ω la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\omega(\delta) = \text{Max}\{ |g(x) - g(t)|, |t - x| \leqslant \delta, (x, t) \in [a, b] \times [a, b] \}$$

1° Montrer que $\omega(\alpha + \beta) \leqslant \omega(\alpha) + \omega(\beta)$.

2° Montrer que $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.

3° Montrer que ω est une fonction croissante continue de δ.

4° Dans cette question on suppose seulement que $f \in C^1[a, b]$.

En utilisant la fonction ω associée à la fonction $f^{(1)}$, donner une majoration de $|e_n|$ utilisant $\omega(h)$.

FIN

X 1180 X

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail